『商品による商品の生産』37 節の検討:
「仮想の実験」を中心に

宮本順介（松山大学）

miyamoto@cc.matsuyama-u.ac.jp

I　はじめに

１）ピエロ・スラッファは『商品による商品の生産』37 節において,「現実の経済体系はいかなるものでも，つねに標準体系に変形できるということが，仮想の実験(imaginary experiment ）によって示されるだろう」[1]と言う.

２）2008 年,「仮想の実験」を検討したマルコ・リッピは，スラッファの「仮想の実験」では必ずしも現実体系を標準体系に変形できるわけではないことを示し，必要な修正方法を提案した[2]. リッピの主張を検討したネリ・サルバドーリも，リッピが主張するようにスラッファの議論には不備があることを再確認し，独自の修正方法を示した[3].

３）本報告ではリッピやサルバドーリの指摘を受け，彼らとは異なる修正方法を提案する.

４）記号を次のように定める.

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \quad i, j = 1 \cdots n \ \text{：投入行列，} \quad \mathbf{x} = (x_i) \quad i = 1 \cdots n \ \text{：産出ベクトル}$$

II 「仮想の実験」

スラッファは「仮想の実験」を言葉で説明しているが，要点を明確にするため，スラッファの文言を数式に置き換える.

１）「厳密に補填に必要なものより大きな数量が生産されるような仕方で，その体系の諸産業の割合を調整する」[4]. 数式に置き換えると,

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^0 < a\mathbf{x}^0 \qquad (1).$$

ただし a は $a > \max_i \dfrac{\left[\mathbf{A}\mathbf{x}^0\right]_i}{x_i^0}$ [5]を満たす任意の値である.

２）「つぎつぎに行われる僅かな比例的なカットによって，すべての産業の生産物をだんだんと減じてゆくものと想像し・・・どれか一つの商品の生産が補填に必要な最低の水準にまで減」[6]ずる. 数式に置き換えると,

---

[1] Sraffa(1960),p.26

[2] Lippi（2008）

[3] Salvadori（2008）

[4] Sraffa(1960),p.26

[5] $\left[\mathbf{A}\mathbf{x}\right]_i$ は $\mathbf{A}\mathbf{x}$ の第 i 要素を表す.

[6] Sraffa(1960),p.26

$$\mathbf{Ax}^1 \le \alpha_1 \mathbf{x}^1 \qquad (2).$$

ただしα_1は$\alpha_1(\mathbf{x}) = \max_i \frac{\left[\mathbf{Ax}^0\right]_i}{x_i^0}$である．

３）「再び各産業の剰余がでてくるように，諸産業の割合を再調整する」[7]．数式に置き換えると，

$$\mathbf{Ax}^2 < \alpha_1 \mathbf{x}^2 \qquad (3).$$

４）「全面的な補填が剰余生産物を少しも残さずに，ちょうど可能になるような程度にまで生産物が減ぜられる点に至るまでは，各生産物について，このような比例的なカットと剰余の再設定との交替を続ける.」[8] その結果q体系が得られ，標準体系

$$\mathbf{Ax}^*(1+R) = \mathbf{x}^* \quad (4)$$

が求まる．ここで$\mathbf{x}^*$は標準商品[9]，Rは標準比率.

５）「仮想の実験」のポイントは，(2) 式から (3) 式へ,そして (3) 式から (2) 式へと生産体系を次々仮想的に変化させることで，標準比率，標準商品を求めるというものである．

III　リッピ＆サルバドーリの指摘

１） どれか一つの商品の生産が補填に必要な最低の水準にまで減ずることとある．したがって (2) 式を導くルールは確立されている．

２）(3) 式についてはこの式を満たすルールが指定されていない．$\mathbf{x}^2$の決め方いかんでは標準比率・標準商品に収束しない可能性がある．

IV 修正と補足

リッピ＆サルバドーリの指摘を受け入れ，(3)式を満たす$\mathbf{x}^2$を次のように決定する．
(2)式に左から正行列$\mathbf{A} > 0$を掛け，

$$\beta_1 \mathbf{Ax}^1 < \mathbf{A}^2 \mathbf{x}^1 < \alpha_1 \mathbf{Ax}^1$$

を導く[10]．ついで$\mathbf{x}^2 = \mathbf{Ax}^1$とおけば

$$\beta_1 \mathbf{x}^2 < \mathbf{Ax}^2 < \alpha_1 \mathbf{x}^2 \qquad (3)'$$

となる．以下同様に順次$\mathbf{x}^n = \mathbf{Ax}^{n-1}$ $(i = 2, 3, \cdots)$とおき，仮想的に生産量を変化させる．

V　近似解法

$(3)'$式を求めるルールを上のように定めるときなにが明らかになるのかを数値例を用い

---

7 Sraffa(1960),p.26
8 Sraffa(1960),p.27
9 標準商品の規準化は省略.
10 スラッファは下に有界な点列を問題にしているが，ここでは上と下に有界な点列を考えることにする.

て説明しよう．

１） $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.3\\ 0.5 & 0.4\end{pmatrix}$ とする．正の固有値（ペロン根） $r(\mathbf{A})$ とおくと， $r(\mathbf{A})=0.7$ である．

２） $\mathbf{x}^0=\begin{pmatrix}5\\ 7\end{pmatrix}$ とおき，「仮想の実験」を行う． $\beta_1(\mathbf{x}^1)=0.62$， $\alpha_1(\mathbf{x}^1)=0.757\cdots$．

$\beta_2(\mathbf{x}^2)=0.692\cdots$， $\alpha_2(\mathbf{x}^2)=0.712\cdots$， $\beta_3(\mathbf{x}^3)=0.698\cdots$， $\alpha_3(\mathbf{x}^3)=0.701\cdots$，

$\beta_4(\mathbf{x}^4)=0.6998\cdots$， $\alpha_4(\mathbf{x}^4)=0.7002\cdots$ となる．

よって

$$\beta_1(\mathbf{x}^1)<\beta_2(\mathbf{x}^2)<\beta_3(\mathbf{x}^3)<\beta_4(\mathbf{x}^4)<r(\mathbf{A})<\alpha_4(\mathbf{x}^4)<\alpha_3(\mathbf{x}^3)<\beta_2(\mathbf{x}^2)<\beta_1(\mathbf{x}^1)$$

という関係が成立する．

数値例から，「仮想の実験」は標準比率の近似解を求める方法であるということが分かる．

VI 問題点

上の近似解法によって標準比率，標準商品の存在が完全に証明されるわけではない．問題点が二つある．

１）有界な単調減少数列 $\{\alpha_n\}$ は収束し， $\lim_{p\to\infty}\alpha_p=\alpha^*$ となる．また有界な単調増加数列 $\{\beta_n\}$ は収束し， $\lim_{p\to\infty}\beta_p=\beta^*$ となる．ここで $\alpha^*\neq\beta^*$ の場合が考えられるが，そのときには $\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ は異なる値に収束し，標準比率には収束しない．

２） $\mathbf{A}$ が半正行列（ $\mathbf{A}\geq 0$ ）の場合，(3) 式が強不等号で成立するとは限らない．例えば

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 0.1\\ 0.5 & 0\end{pmatrix},\quad \gamma=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix},\quad \delta=\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}$$

とすると， $\gamma'\leq\delta'$ [11]であるが，両辺に $\mathbf{A}$ を掛けると $\mathbf{A}\gamma'=\begin{pmatrix}0.2\\ 0.5\end{pmatrix}\leq\mathbf{A}\delta'=\begin{pmatrix}0.4\\ 0.5\end{pmatrix}$ となり，関係式 $\mathbf{A}\gamma'<\mathbf{A}\delta'$ が得られない．この場合 (3) 式から (2) を導くことができないので，近似解法は不首尾に終わる[12]．

VII 補足

これら２つの問題点は解決可能である．

１）について．

---

11 ダッシュは転置ベクトルを表す．

12 この数値例は不安定行列であり，そもそも近似解法が適用できない．安定行列の場合には $\mathbf{A}\geq 0$ であっても， $\mathbf{A}^{\gamma}>0$ となる $\gamma>1$ が存在するので近似解法が適用できる．

（１）産出量$\mathbf{x}$を∞ノルムによって規準化し，$\mathbf{x}^1 = \dfrac{1}{\left\|\mathbf{x}^0\right\|_\infty}\mathbf{x}^1$，$\mathbf{x}^{n+1} = \dfrac{1}{\left\|\mathbf{A}\mathbf{x}^n\right\|_\infty}\mathbf{A}\mathbf{x}^n$

$(n = 1, 2, \cdots)$ とおく.

（２）α_i , β_i の定義より，$\alpha_2 < \alpha_1$, $\beta_1 < \beta_2$ であるので，単調な数列

$$0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots \beta_p < \beta_{p+1} \cdots < \alpha_{p+1} < \alpha_p < \cdots \alpha_2 < \alpha_1$$

が得られる．それらは収束し，収束値をα^*，β^*とすると

$$\lim_{p\to\infty}\alpha_p = \alpha^*,\quad \lim_{p\to\infty}\beta_p = \beta^* \quad (4).$$

（３）$\varepsilon = \min_{i,j} a_{ij}$ とするとき

$$\frac{\left\|\mathbf{A}x^n\right\|_\infty}{\varepsilon}\left(\beta_{n+1} - \beta_n\right) \geq \left\|\mathbf{A}x^n - \beta_n x^n\right\|_\infty \quad (5)$$

が成立する[13].

$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \beta^*$ より，$\lim_{n\to\infty}\left(\beta_{n+1} - \beta_n\right) = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\mathbf{A}x^n - \beta_n x^n\right\|_\infty = 0 \quad (6).$$

（４）$Q = \left\{\mathbf{x} \in R^n \,\left\|\mathbf{x}\right\|_\infty \leq 1\right\}$ とおく．点列$\left\{\mathbf{x}^n\right\}$ $i = 0, 1, 2\cdots$ は$\left\{\mathbf{x}^n\right\} \subset Q$．$Q$はコンパクト

であるので，点列$\left\{x^n\right\}$はQのなかに収束する部分列をもつ．収束する部分列として

$\left\{x^{n_m}\right\}_{m=1,2,\cdots}$ を選べば，$\lim_{m\to\infty}\left\{x^{n_m}\right\} = x,\quad x \in Q$ となる.

よって$\lim_{n\to\infty}\left\|\mathbf{A}x^{n_m} - \beta_{n_m} x^{n_m}\right\|_\infty = \left\|\mathbf{A}x - \beta x\right\|_\infty = 0$．$\infty$ノルムの定義より，

$$\mathbf{A}x = \beta x \quad (7)$$

が成立する．$\beta = 1 \big/ (1+R)$ であるので, 標準比率, 標準商品の存在が証明された. また$x > 0$,

$\beta > 0$は明らかである.

２）について.

$\mathbf{A}$ が正行列の場合には上で見たように（7）式が成立する．この結果を前提に次の 3 つの補題[14]を用いることで, 分解不能な半正行列$\mathbf{A}(\geq 0)$の場合にも (7) 式を満たす$x > 0$, $\beta > 0$が存在することが証明される.

13　(5)式の導出については数学注を参照.

14　証明については齋藤（1966），221－222 ページを参照.

補題１　正行列$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$について$\mathbf{A}$の正固有値（ペロン根）をα^{A}，$\mathbf{B}$の正固有値（ペロン根）をα^{B}とする．このとき$\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ならば$\alpha^{A} \geq \alpha^{B}$となる．

補題２　$\mathbf{A}$を分解不能とは限らない非負行列とする．このとき$\mathbf{A}x = \beta x$となる$x \geq 0$，$\beta \geq 0$が存在する．

補題３　$\mathbf{A}$を分解不能な非負行列とすると，任意の半正ベクトル$x \geq 0$に対して$\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}\right)^{n-1}\mathbf{x} > 0$が成立する．

補題１，補題２，補題３より，次の命題が成立する．

命題　$\mathbf{A}$を分解不能な非負行列とする．このとき$\mathbf{A}\mathbf{x} = \beta\mathbf{x}$となる$x > 0$，$\beta > 0$が存在する．

VIII　まとめ

１）スラッファは，(3) 式を満たす$\mathbf{x}$がどのような値であっても「仮想の実験」によって標準比率に収束するものと考えていた．しかし値の取り方によっては標準比率に収束しない場合がある．リッピとサルバドーリがこの問題点を初めて明らかにした．

２）本報告では「仮想の実験」のこうした不完全さを修正するため，　$\mathbf{x}^{n} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{n-1}$とおくことで (3) 式を導くという修正法を提案した．この修正によってスラッファのアルゴリズムはうまく機能し，さらに数学的な補足を加えることで標準比率の存在が証明されることを明らかにした．ただし不安定な半正行列 の場合にはこのアルゴリズムを適用できない．

３）「仮想の実験」には不備な部分が存在する．しかし議論の方針が間違っているわけでない．

数学注

$\varepsilon = \min_{i,j} a_{ij}$とすると，$(\mathbf{A}\mathbf{x}^{n} - \alpha_{n}\mathbf{x}^{n}) > 0$であるので，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{A}x^{n} - \beta_{n}x^{n})_{j} \geq \varepsilon \left\| \mathbf{A}x^{n} - \beta_{n}x^{n} \right\|_{\infty} \quad i = 1,\cdots,n \quad (8)$$

が成立する．ただし，$(\mathbf{A}x^{n} - \beta_{n}x^{n})_{j}$はベクトル$\mathbf{A}x^{n} - \beta_{n}x^{n}$の第$j$成分を示す．

(8) 式の両辺に$\dfrac{1}{\left\|\mathbf{A}x^{n}\right\|_{\infty}}$を掛けると

$$\frac{1}{\left\|\mathbf{A}x^{n}\right\|_{\infty}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{A}x^{n} - \beta_{n}x^{n})_{j} \geq \frac{1}{\left\|\mathbf{A}x^{n}\right\|_{\infty}} \varepsilon \left\| \mathbf{A}x^{n} - \beta_{n}x^{n} \right\|_{\infty} \quad i = 1,\cdots,n \quad (9).$$

$$（9）式の左辺=\frac{1}{\left\|\mathbf{A}x^n\right\|_\infty}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{A}x^n)_j-\beta_n\frac{1}{\left\|\mathbf{A}x^n\right\|_\infty}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x^n)_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{A}x^{n+1})_j-\beta_n\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x^{n+1})_j \quad i=1,\cdots,n.$$

つぎにβ_{n+1}を$\beta_{n+1}=\max_{1\le j\le n}\frac{\left(\mathbf{A}x^{n+1}\right)_i}{x_i^{n+1}}$と定義し，定義を満たす成分を$k$とおき，$k$について（7）の左辺をさらに書き換えると，

$$\sum_{j=1}^{n}a_{kj}(\mathbf{A}x^{n+1})_j-\beta_n\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x^{n+1})_k=a_{n+1}\left(x^{n+1}\right)_k-\beta_n\left(x^{n+1}\right)_k=\left(\beta_{n+1}-\beta_n\right)\left(x^{n+1}\right)_k$$

となる.

kに関して，（9）式を評価すると，

$$\left(a_{n+1}-\beta_n\right)\left(x^{n+1}\right)_k=\frac{1}{\left\|\mathbf{A}x^n\right\|_\infty}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\left(\mathbf{A}x^n-\beta_n x^n\right)_j$$

$$\ge\frac{\varepsilon}{\left\|\mathbf{A}x^n\right\|_\infty}\left\|\mathbf{A}x^n-\beta_n x^n\right\|_\infty \quad (10).$$

ここで$\left\|x^{n+1}\right\|_\infty\le 1$であるので，

$$\frac{\left\|\mathbf{A}x^n\right\|_\infty}{\varepsilon}\left(a_{n+1}-\beta_n\right)\ge\left\|\mathbf{A}x^n-\beta_n x^n\right\|_\infty \quad (11).$$

参考文献

Chiodi G. and L. Ditta (eds.) (2008), *Sraffa or an Alternative Economics*, Palgrave Macmillan.

Lippi, M.(2008),"Some Observations on Sraffa and Mathematical Proofs With an Appendix on Sraffa's Convergence Algorithm", in Chiodi G. and L. Ditta (eds.) (2008).

齋藤正彦(1966),『線形代数入門』東京大学出版.

Salvadori, N.(2008), "Commentary by Neri Salvadori: On a Proof of Sraffa's",in Chiodi G. and L. Ditta (eds.) (2008).

Sraffa,P.(1960),*Prodction of Commodities by means of Commodities : Prelude to a Critique of Economic Theory*, Cambridge, Cambridge University Press, （菱山泉・山下博訳『商品による商品の生産一経済理論批判序説』有斐閣，1962 年）.