

均衡分析における主体の異質性について

京都大学 経済研究所

原 千秋

2011年11月3日 経済学史学会

龍谷大学

動機

- 経済学の各分野で使われる数理モデルを「主体の異質性」という観点から概観したい．
- 現実の経済は，家計（消費者）・企業（生産者）・銀行（金融機関）・政府（自治体）といった複数の異質な経済主体より成る．
- しかし，マクロ経済学やファイナンスといった諸分野では，代表的個人モデルと呼ばれる，1人の消費者（と1人の生産者）より成るモデルを使うことが多い．数学的な解析を簡単にするためである．
- そのようなモデルから，正しい予想や処方箋は得られるのか？

分析の枠組

- 複数の家計（消費者・投資家）より成る，不確実性下の交換経済を考察する．
- 各家計 $i = 1, 2, \dots, I$ の効用関数は

$$U_i(c_i) = E^{P_i} \left(\int_0^T \exp(-\rho_i t) u_i(c_t^i) dt \right) \quad \text{または} \quad E^{P_i} \left(\sum_{t=0}^T \delta^t u_i(c_t^i) \right)$$

で与えられるとする．ただしここで

$c^i = (c_t^i)_{t \in [0, T]}$, （消費率を表す確率過程）

P_i は確率測度, （主観的確率）

$\rho_i \in (0, 1)$, （主観的時間割引率）

$u_i(x) = \frac{x^{1-\gamma_i} - 1}{1 - \gamma_i}$. （効用関数 $\gamma_i > 0$ は一定の相対的リスク回避度）

例 1：動学マクロモデル

- 伝統的にマクロ経済学は以下の二派に分けられた：
 - ー ケインズ学派：不況時には財政発動を主張
 - ー シカゴ学派：自由放任を標榜

特にケインズ学派の分析はミクロ経済学的基礎付けを欠き，直接にマクロ経済変数間の関係式を仮定・分析する．また，短期と長期を別々の枠組で扱う．

- モデルの一貫性を保証し，主体の期待がもたらす影響を分析するために，マクロ経済分析には，DSGE (dynamic stochastic general equilibrium, 動学的確率的一般均衡) モデルが最適との合意が得られるようになった (Woodford (2009, *AEJ: Macro*)) ．

- 特に，代表的個人モデル $I = 1$ が多用されている．

例えば，**Equity Premium Puzzle**で有名な Mehra and Prescott (1985, *Journal of Monetary Economics*) も，CRRA 期待効用関数を持つ代表的個人モデルを使用．

- DSGE モデルに対する批判としては，Solow (2008, *Journal of Economic Perspectives*) が有名．本年 7 月 20 日には，下院でも同様の旨証言．
- DSGE モデルに異質性を盛り込むことは一般的になってきたが，Krusell and Smith (1998, *Journal of Political Economy*) のように，事前同質性 (ex-ante homogeneity) を仮定することが多い．

例2：Black-Scholesの公式

- 債券と株式が取引されている証券市場を考えよう．価格過程は

$$dB_t = rB_t dt \quad (\text{確実かつ一定})$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t \quad (\text{幾何ブラウン運動})$$

とする．

- 行使日 T , 行使価格 K のヨーロピアン・コール・オプションの価格過程は $C(S_t, t)$ である．ただしここで関数 $C : \mathbf{R}_{++} \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}$ は以下で定義される．

$$C(x, t) = x\Phi(z_1) - K \exp(-r(T - t))\Phi(z_2),$$

$$z_1 = \frac{\log \frac{x}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

$$z_2 = \frac{\log \frac{x}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}.$$

- BS 公式は「裁定取引の非存在条件」から導出される．この証明は preference-free (投資家のリスク許容度からは独立) な論法である．それゆえ BS 公式そのものが preference-free であると考えられることが多い．
- しかし, 債券価格過程 $B = (B_t)_t$ および株価過程 $S = (S_t)_t$ の仮定は preference-free ではない．また, この仮定が満たされないとき, BS 公式に均衡での利子率と株価を代入しても, 公式から導出される値は均衡でのオプション価格とは異なる．
- 実際, $P_1 = P_2 = \dots P_I = P$, $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_I$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_I$ のいずれかでも成立しなければ, 均衡での利子率と株価は, 上述のものとは異なる．

例3：開発途上国での効率的リスク配分問題

- 資本市場が未発達だが親族間のお金の貸借が盛んな開発途上国では，家計間・部族間のリスク配分が効率的であるかを検定するためには，家計の消費のパネル・データを検討する必要がある．
- $P_1 = P_2 = \dots P_I = P$, $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_I$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_I$ のいずれもが成立するならば，効率的リスク配分においては，各家計の消費量の総消費量に対する割合は一定である．

Townsend (1994, *Econometrica*) は，観察される各家計の消費量の割合が一定でないことをもって，インド農村部の家計間・村落間でのリスク配分は効率的という仮説を棄却した．

- すべての家計が同じ DRRA (decreasing relative risk aversion , 減少的相対的リスク回避度) 効用関数を持つとき , 各家計の消費量の総消費量に対する割合は一定ではない .

この場合 , Ogaki and Zhang (2001, *Econometrica*) は , 村落間のリスク配分は効率的という仮説は棄却したが , 各集落内でのリスク配分が効率的という仮説を棄却しなかった .

- Mazzocco and Saini (forthcoming, *American Economic Review*) は効用関数が全ての家計間で同一であるという仮説を棄却した .

例4：環境経済学の費用便益分析

- 地球温暖化問題では，100年や200年の超長期にわたる費用便益分析を行う必要がある．
- 施策やプロジェクトの是非は，将来の費用便益の割引現在価値を求める際に用いる利子率（割引率）に大きく依存する．
- たとえば，100年後の100万円の割引現在価値は
 - － 割引率1%の場合： $1,000,000 \times \exp(-100 \times 0.01) \approx 367,879$ 円
 - － 割引率5%の場合： $1,000,000 \times \exp(-100 \times 0.05) \approx 6,737$ 円
- では，いかなる割引率を用いるべきであろうか？

- Weitzman (2001, *American Economic Review*) は2,000 人を超す経済学者に質問したが、その答えは平均4% 標準偏差3% のガンマ分布に従っていた。12 人のノーベル賞受賞者を含む著名な50 人に質問しても、同様の回答。
- そこで、時間の経過とともに割引率が下がる、**双曲割引** (hyperbolic discounting) を使うことを提案。

同様の提案は *Stern Review: The Economics of Climate Change* の Chapters 2 and 2A にも見られる。

ここからの議論の展開

1. まず，複数の消費者から成る経済の定式化と均衡概念の定義を紹介．
2. 次に，効率的リスク配分を定義し，代表的個人を構成する．
3. 最後に，効率的リスク配分と代表的個人の特徴と，前述の文献への含意を探る．

交換経済の均衡概念

- 連続時間モデルを仮定．不確実性は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で記述．

- 各家計 $i = 1, 2, \dots, I$ の効用関数は

$$U_i(c_i) = E^{P_i} \left(\int_0^T \exp(-\rho_i t) u_i(c_t^i) dt \right)$$

で与えられるとする．

- 各家計 i の初期保有量を $e^i = (e_t^i)_{t \in [0, T]}$ と書く．

総初期保有量 $\sum_i e_i$ を e と書く．

- 全ての状態依存財 (state-contingent commodity) が市場で同時に取引されているとする。これは、証券市場が完備 (complete) と仮定することと同値。

状態依存財の価格は、状態価格デフレーター (state price deflator, state price density, pricing kernel) と呼ばれる確率過程 $\pi^i = (\pi_t^i)_{t \in [0, T]}$ で特徴付けられるとする。

- 家計 i の効用最大化問題は以下の通り：

$$\begin{aligned} & \max_{c=(c_t)_{t \in [0, T]}} U_i(c) \\ & \text{subject to } E^P \left(\int_0^T \pi_t c_t \, dt \right) \leq E^P \left(\int_0^T \pi_t e_t \, dt \right). \end{aligned}$$

代表的個人

- ウェイト $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_I) \in R_{++}^I$ を固定し, 任意の総消費過程 $c = (c_t)_{t \in [0, T]}$ に対し,

$$\begin{aligned} & \max_{(c^1, c^2, \dots, c^I)} \sum \lambda_i U_i(c^i), \\ & \text{subject to } \sum c^i = c. \end{aligned} \tag{1}$$

という最大化問題を考えよう. この問題の価値関数を $U(\cdot, \lambda)$ と表す. すなわち, $(c^1, c^2, \dots, c^I)$ が (1) の解であるとするとき,

$$U(c, \lambda) = \sum \lambda_i U_i(c_i)$$

が成立する.

- 定理： 状態価格デフレーター π と状態依存財の配分 $(c^1, c^2, \dots, c^I)$ が任意の Arrow-Debreu 均衡であるとする。このとき、以下の2条件を満たす $\lambda \in R_{++}^I$ が存在する。

1. 均衡配分 $(c^1, c^2, \dots, c^I)$ は、 $c = e$ とおいたときの (1) の解である。

2. 総初期保有量 e は以下の最大化問題の解である：

$$\begin{aligned} & \max_{c=(c_t)_{t \in [0, T]}} U(c, \lambda), \\ & \text{subject to } E^P \left(\int_0^T \pi_t c_t dt \right) \leq E^P \left(\int_0^T \pi_t e_t dt \right). \end{aligned} \quad (2)$$

この定理の条件 1 は、**厚生経済学の第一基本定理** (first fundamental theorem of welfare economics) を意味する。条件 2 は、 I 人の消費者より成る元の経済の均衡状態価格デフレーターは、効用関数 $U(\cdot, \lambda)$ と初期保有量 e を持つ消費者のみより成る経済の均衡状態価格デフレーターに等しいことを示している。よって、 $U(\cdot, \lambda)$ を代表的個人の効用関数と解釈できる。

- $P_1 = \cdots = P_I = P$ と $\rho_1 = \cdots = \rho_I = \rho$ が成り立つとすると ,

$$\sum_i \lambda_i U_i(c_i) = E^P \left(\int_0^T \exp(-\rho t) \sum_i \lambda_i u_i(c_t^i) dt \right) ,$$

なので , (1) を解くには , 任意の $x \in \mathbf{R}_{++}$ に対し , 以下の最大化問題を解けば十分である .

$$\begin{aligned} & \max_{(x_1, x_2, \dots, x_I) \in \mathbf{R}_{++}^I} \sum \lambda_i u_i(x_i), \\ & \text{subject to} \quad \sum x_i = x. \end{aligned} \tag{3}$$

- (3) の解を

$$(f_1(x, \lambda), f_2(x, \lambda), \dots, f_I(x, \lambda))$$

と表し , 価値関数を u と表すと

$$u(x, \lambda) = \sum \lambda_i u_i(f_i(x, \lambda)).$$

- このとき , 元の最大化問題 (1) の解は

$$(c^1, c^2, \dots, c^I) = (f_1(c, \lambda), f_2(c, \lambda), \dots, f_I(c, \lambda))$$

で与えられ , 代表的個人の効用関数 U は

$$U(c, \lambda) = E \left(\int_0^T \exp(-\rho t) u(c_t, \lambda) dt \right)$$

で与えられる .

結果と含意

- $P_1 = \cdots = P_I = P$, $\rho_1 = \cdots = \rho_I = \rho$, $\gamma_1 = \cdots = \gamma_I$ が成立するならば , 任意の i に対し , $f_i(\cdot, \lambda)$ は線形関数であるが , もし $\gamma_1 = \cdots = \gamma_I$ が成立しなければ , いずれの i に対しても , $f_i(\cdot, \lambda)$ は線形関数ではない . また , $\gamma_i = \gamma_j$ が成立しないことと , $f_i(\cdot, \lambda)$ と $f_j(\cdot, \lambda)$ のグラフが原点以外で少なくとも一度は交わることは同値 .

よって , 開発途上国の効率的リスク配分問題において , もし家計の相対的リスク回避度が異なれば , 各家計の消費量の総消費量に対する割合が一定でなくても , リスク配分は効率的でありうる . また , $f_i(\cdot, \lambda)$ と $f_j(\cdot, \lambda)$ が交わるなら , リスク回避度は同一でないと結論づけられる .

- $P_1 = \dots = P_I = P$, $\rho_1 = \dots = \rho_I = \rho$, $\gamma_1 = \dots = \gamma_I = \gamma$ が成立するならば , 代表的個人も一定の相対的リスク回避度 γ を持つが , もし $\gamma_1 = \dots = \gamma_I$ が成立しなければ , 代表的個人の相対的リスク回避度は総消費量の減少関数である .

よって , DSGE 代表的個人モデルにおいては , 代表的個人の効用関数の相対的リスク回避度は減少関数であると仮定すべきである .

BS モデルにおいては , 株価のボラティリティ σ は定数ではなく , 総初期保有量 e の減少関数であると仮定すべきである .

主観的時間割引率・主観的確率が異質な場合

- 以下では, $P_1 = \dots = P_I$ または $\rho_1 = \dots = \rho_I$ が成立しないとしよう.

任意の i に対し, P_i の P に関する密度過程 ζ^i が存在するものとする.

確率過程 $\Phi^i = (\Phi_t^i)_{t \in [0, T]}$ を $\Phi_t^i = \exp(-\rho_i t) \zeta_t^i$ で定義すると,

$$\begin{aligned} U_i(c_i) &= E^{P_i} \left(\int_0^T \exp(-\rho_i t) u_i(c_t^i) dt \right) \\ &= E \left(\frac{dP_i}{dP} \int_0^T \exp(-\rho_i t) u_i(c_t^i) dt \right) \\ &= E \left(\int_0^T \zeta_i(t) \exp(-\rho_i t) u_i(c_t^i) dt \right) \\ &= E \left(\int_0^T \Phi_i(t) u_i(c_t^i) d\tau \right). \end{aligned}$$

よって (1) の目的関数は

$$\sum_i \lambda_i U_i(c_i) = E \left(\int_0^T \left(\sum_i (\lambda_i \Phi_t^i) u_i(c_t^i) \right) dt \right)$$

と書くことができる .

$\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^I)$, $\lambda \diamond \Phi = (\lambda_1 \Phi^1, \lambda_2 \Phi^2, \dots, \lambda_I \Phi^I)$ と書くことにすると (3) の解を使って (1) の解は

$$(c^1, \dots, c^I) = (f_1(e, \lambda \diamond \Phi), \dots, f_I(e, \lambda \diamond \Phi))$$

と表される . 代表的個人の効用関数 U は

$$U(c, \lambda) = E \left(\int_0^T u(c_t, \lambda \diamond \Phi_t) d\tau \right),$$

と表される .

結果と含意

- もし $\gamma_1 = \cdots = \gamma_I$, $P_1 = \cdots = P_I = P$, $\rho_1 = \cdots = \rho_I = \rho$ が成立するならば , 代表的個人も一定の時間割引率 ρ を持つが , もし $\rho_1 = \cdots = \rho_I$ が成立しなければ , 代表的個人の時間割引率は時刻 t の減少関数である .

よって , DSGE 代表的個人モデルにおいては , 代表的個人の効用関数の時間割引率は時刻の減少関数であると仮定すべきである .

BSモデルにおいては , 安全資産の利回り r は定数ではなく , 時刻 t の減少関数であると仮定すべきである .

開発途上国の効率的リスク配分問題においては , もし家計の主観的時間割引率が異なれば , 各家計の消費量の総消費量に対する割合が時間とともに変動する場合でも , リスク配分は効率的でありうる .

- もし $\gamma_1 = \cdots = \gamma_I$, $\rho_1 = \cdots = \rho_I = \rho$, $P_1 = \cdots = P_I = P$, が成立するならば , 代表的個人の主観的確率も P であるが , もし $P_1 = \cdots = P_I = P$ が成立しなければ , 適当な仮定の下で , 代表的個人の主観的確率で評価した総初期保有量を分散は , 実際の分散より大きくなる . また , 代表的個人の時間割引率は時刻とともに増加または減少する .

よって , ブラック・ショールズモデルにおいては , 安全資産の利回り r は定数ではなく , 時刻とともに変動すべきである . また , 実際の株価のボラティリティよりも高い値を公式に代入すべきである .

まとめ

- 均衡分析において，同質性の仮定が広く使われていることを紹介した．
- 異質性を許容した場合の，効率的リスク配分と代表的個人の効用関数に関する諸結果を紹介した．
- 今回の報告では完備証券市場を前提としたが，不完備証券市場の場合でも同様の分析が展開されるべきである．