

ナッシュ均衡の再検討

杉本昌俊

1. 基数的効用理論再説

オーストリア学派が、貨幣の限界効用をエージェント間で一定と仮定し、効用は可測的だとする基数的効用理論を効用価値説の手法としたのに対して、ロビンズは「『富んだ人の所得の限界効用は貧しい人の所得の限界効用よりも小さい』とし「貨幣の限界効用一定と仮定せずに序数的選好が与えられることによって消費者の需要曲線が描ける」（木村, 2008, pp. 7-9）と序数的効用理論を主張したが、期待効用説によって基数的効用理論は復権した。

「統計的論法が進化する間、妥当な選択とは、期待貨幣価値の最大化を意味することが、当然のこととされていた。セントペテルスブルグのパラドックスに誘発され、ダニエルベルヌーイ Bernoulli は 1738 年に貨幣の凹関数相当を最大化することを提案し、結果的に金銭の逡減的限界価値を示した。期待効用理論が生まれた。ほぼ 200 年後、フォンノイマン及びモルゲンシュテルン von Neumann and Morgenstern. 1944. *Theory of games and economic behavior*, (以下 Theory) は、ゲーム理論の研究途上で、選好が公理の一つの特定の集合に従うならば、それらの選好は、それが相当する効用関数で表わされ得ることを示した。... 期待効用説は、当時、さし迫って必要とされていた『可測効用』を確立するための一つの当然の途だった。... Theory の出版は、ずいぶん大騒ぎになった。それまで、経済学者たちは、単調的転化を十分に活かすというただそれだけで、序数的効用説に満足し、序数的効用だけを示す選好を用いて、どれ程多くの分析が可能なのかは知り尽くしていた。Edwards. 1954. *The theory of decision making*, *Psychological Bulletin*, vol. 51, は Hicks and Allen. 1934. *A reconsideration of the theory of value*, I. II., *Econometrica*, vol. 1, が『経済学者にとっては、心理学における行動主義者革命の様なものだった』ことを指摘した。それは、現代の経済学者たちが、調査証拠あるいは内観に、そして行動理論構築のためのデータとして実際の選択にほぼ専一の信頼を置くことに不審の種を蒔いた。すなわち、経済学者たちが、基数的効用説は不要だということを確認していたちょうどその時に、フォンノイマンとモルゲンシュテルンは、基数的効用を導出するための一つの簡単な方法を発見したのだった。(ナッシュ、Nash, J., 1950. *The Bargaining Problem*, *Econometrica*, vol. 18, pp. 155-162. は随意科目「国際経済学」の講義ノートを出版したもののだが、そこでの線形基数効用理論の説明に彼らは影響した。(Leonard, 1994. p. 497 及び n. 14))

Xが $pH + (1-p)L$ と無差別(そして任意に $u(H) = 1$ 、 $u(L) = 0$ である時、 $u(X) = p$) (Camerer. 1995. pp. 617-619 及び n. 24)。p を確率、u を効用関数そして一を選好における無差別を標記するものとし、数量タームの無差別選好関係 $X \sim pH + (1-p)L$ を効用タームに直した $u(x) = pu(H) + (1-p)u(L)$ が $u(H) = 1$ 及び $u(L) = 0$ より $u(X) = p$ という証明で、数量の組み合わせ (H, L) が一つ与えられれば、任意の数量 X の効用に一意に対応する確率 p が決まる。対称ゲームであればエージェント間で選好すなわち無差別線の形状が同じなので、得られた確率 p は全てのエージェントにあてはまるから、効用が比較可能で基数的効用説が期待効用理論を用いて成り立つ理屈だ。単に対称ゲームを仮定するだけでは、無差別線がエージェント間でホモセティックなことを意味するだけであり、序数的効用説に陥るので、組み合わせ (H, L, X) でもたらされる確率 p による証明で効用の可測性は確実なものとなった。

ここで、基数的効用復権のための期待効用理論とは別の方法を模索してみたい。「序数的効用関数が得られ... 間接効用関数が定義される。... それは、標準化された諸価格の一関数として最大効用を与える。直接効用関数は、市場現象から独立した選好を説明する。間接効用関数は、最適化と市場諸価格を僅かに再現する。」(Henderson and Quandt. 1980. p. 41)。そのミクロ経済学の教科書は、間接効用のツールとしてのメリットを説いた上で、ロイの恒等式 Roy's identity を挙げて、「最適商品需要は、間接効用関数の導関数とラグランジュ乗数の最適値(すなわち所得の限界効用)に関連づけられる」(Ibid., pp. 41-42) ことを説明する。間接効用関数の導関数とは、所得制約条件を伴う一般均衡体系における各商品の限界効用のことであり、各商品の逆需要関数に他ならない。序数的効用理論が不動の地位を確立していることを見てとれる。

ロビンズが効用可測性を批判した拠所である「所得」がまさに理論体系のマイルストーンになっている。さて、所得を構成する成分をエージェント自身の労働の賃金と継承資産がエージェントにもたらす利子とし、単純化のために継承資産を除くと、労働の賃金が残る。賃金率が労働時間の貨幣による表現であるとすれば、所得を構成する賃金は労働市場を通じて抽象的労働に還元される。抽象的労働は、エージェント間で比較が可能なので、所得の効用の可測性は担保され、基数効用説から商品の需要関数が導き出される。

この様に、期待効用理論では「確率」でエージェント間の比較を実効させ、間接効用説では「抽象的労働」でそれを行わせて、各々、基数的効用理論を復権させると思われる。

2. フォンノイマンとモルゲンシュテルンのゲーム理論

Theory に対し、「サミュエルソンは、その本の論点は、ゼミ演習でのその筆者たちの対立で救われはしないと感じた。モルゲンシュテルンは無愛想に『とてもナポレオンの』と表現され、『偉大な主張』にもかかわらず、それを立証するための数学的手段を彼自身に欠いている。それ以上に、彼は常に、何人かの物理学者あるいは他者の権威を誘発するという厄介な習慣をもっていた」(Leonard, 1994. p. 494)と懐疑的だった。「フォンノイマンとモルゲンシュテルンが、ともに、経済学で微分を使用することに大いに批判的だったことは、『経済分析の基礎』の筆者をして、彼らに慕わせることに助力することは、まず、あり得なかった。序章で、彼らは、経済行為者間の相互依存を強調し、『経済数学の主たるツールとして、算術、微分方程式等の使用が、今、過度に強調されていること』を批判して、彼らの新しいアプローチを促している。モルゲンシュテルンは、1947年10月8日付けの日記に『[サミュエルソンは、]安定性についての説が曖昧だと[ジョニーは]言う。彼は数学者ではないし、人は彼の分析を信用すべきではない。そして、30年経っても、彼はゲーム理論を理解しないだろう。』」(Ibid., p. 494, n. 3)

「プリンストンの経済学部では、警告が、公然の敵意へ途を与えて久しかった、そしてジャコブヴァイナーは、全くもって不人気なモルゲンシュテルンの上に、軽蔑を積み上げて位を上げた。...『経済学部は、全くオスカーを嫌悪した、起きつつあることを彼らが理解出来なかったからとばかりも言い切れず、オスカーにある種、貴族的性質を感じていた、そして、かなりの程度、大衆的な経済学部だったことが嫌悪のための理由を付け加えた。』そして、ゲーム理論に関して、『彼らは関心がなかっただけでなく、否、彼らには否定的な関心があった。』」(Ibid., p. 494 及び n. 4)

「モルゲンシュテルンよりも大きな程度に、フォンノイマンの存在は、学界の領域を十分に越えて影響し、軍の高官としての彼の地位を通じて、ゲーム理論へのかなりの注目を集めた。第二次大戦中と同じく、プリンストンで彼は、軍事関係の数学研究を続け、彼の承認で線形プログラミング及び関連学説の開発のために、海軍研究局 O. N. R. の補助金が用意された。アルバートタッカーによれば、1947年後半に、線形プログラミングの単純な方法を開発していた George Dantzig が研究についてフォンノイマンの意見を聴くために空軍によってワシントン D. C. に送り込まれた。機敏な性格で、フォンノイマンは即座にミニマックス定理と線形プログラミングの間の概念形成の連鎖を観て、研究の可能性に熱中した。これが、プリンストンでの線形プログラミングとゲーム理論の研究への O. N. R. 試行プロジェクトからの補助につながった。タッカー主導のこのプロジェクト開始は、彼の学生であった David Gale とハロルドクーンを巻き込んだ。... 経済学の一人の大学院生として、

Martin Shubic は O. N. R. 資金のモルゲンシュテルン兵站学研究プロジェクトから援助された。」(Ibid., pp. 494-495 及び n. 6)

線形プログラミングが、ミニマックス問題、2人ゼロサムゲームと理論的に同方向にあったことが、以後のプリンストンでの研究を Theory の中心課題であった n 人協力ゲームから逸脱させ、Gale、クーン、タッカー等の研究成果はコールズ委員会 Cowles Commission によって公刊された(Ibid., p. 495)。コールズ委員会については、1950年代前半の同じ時期に、一般均衡理論で Gerald Debreu がシカゴ大学の経済学研究として参画していたことは見逃せない(Starr. 1997. p. 8. n. 2)。

2人ゼロサムゲームのためのミニマックス解の存在は、von Neumann, 1928. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, 英訳、On the Theory of Games of Strategy in Tucker and Luce eds., 1959. Contributions to the Theory of Games, が証明しているが、一般 n 人ゲームのための解として開発される安定集合は、当時は一般的存在の証明が未だなされず、Lucas, 1969. The proof that a game may not have a solution, Transactions of the American Mathematical Society. vol. 137, pp. 219-229 で安定集合が空で n 人ゲームが構築出来ることが明らかにされるまで待つことになる(Leonard, 1994, pp. 496-497)。

ミニマックス定理は、非協力ゲームに対応する一方、協力ゲームの解としての安定集合に対しては、ナッシュ等にとって、均衡ではゲーム参加者数と戦略の数は同じだ(Ibid., p. 496, pp. 498-499)と、あたかも一般均衡理論の初期に、解の存在に方程式の数を数え上げる方法(Starr. 1997. p. 7)が採られていたのと実情は変わっていなかったようだ。ある種の協力ゲームが現象として認められたのが、1950年1月にランド研究所 Rand Corporation で Melvin Dresher 及び Merrill Flood が行った実験においてであり、Dresher の黒板でそれを偶然見つけたタッカーは、プリズナーのジレンマという名をそのゲームに与えて話を組み立て(Roth, 1995. pp. 8-9 及び n. 12)、協力ゲームがようやく理論的端緒を開いた段階だったようだ。ランド研究所では John Williams 主導の数学グループがゲーム理論やサイバネティクスを新分野として研究し、彼がフォンノイマン等プリンストンとの人脈を築いていた、もっともランドのフォンノイマンへの関心はコンピューター分野が主だが(Leonard, 1994. p. 495)。プリンストンで Ph. D を得たナッシュが博士論文を学会誌に発表、Nash, 1951. Non-cooperative games, Annals of Mathematics, vol. 54, pp. 286-295、する準備に一夏を過ごしたのもランドだった(Ibid., p. 499, n. 17)。

3. ナッシュ登壇

1948年にプリンストンの大学院に進学したナッシュは、タッカーの指導の下で Ph. D を

仕上げた。ナッシュは2人交渉問題公理を説明し、効用関数の転化に関する不変性、パレート最適、相互非関連代替肢の独立性そして対称性という合理的要件を所与に、実現可能な唯一の解は、プレイヤーの効用の積を最大にするものだと論じた。彼が言う「解」とは、達成可能な事柄についてのプレイヤーたちの期待を所与に、合理的プレイヤーが合意を期待出来る分配のことだ(Ibid. p. 497 及び n. 14)。

ナッシュが、非協力ゲームと呼んだコミュニケーション、従って、連携の機会を持たないゲームの結合的均衡点、すなわち、ナッシュ均衡は、一般均衡論者たちにとっては、フォンノイマンの1937年の拡大経済モデル(英訳、A Model of General Economic Equilibrium, 1945-1946, Review of Economic Studies, vol. 13) からカクタニの固定点定理 Kakutani. 1941. A generalization of Brouwer's Fixed point theorem, Duke Mathematical Journal, vol. 8, pp. 457-459 を経て彼に至ったものに映り、ナッシュ均衡とは、経済エージェント等が合理的で、彼らが同時に彼らの効用を最大にするように行動するという学説の形象化とされる(Leonard, 1994. pp. 497-498)。ナッシュは口頭では有限n人ゲームで、極大値を保証する関数の閉鎖性と期待値を担保する集合の凸性を与件に、カクタニ定理で、写像が固定点を持つこと、すなわち、均衡の存在を報告している(Ibid., p. 499, n. 16)。

1950年の博士論文でナッシュは、フォンノイマンとモルゲンシュテルンの Theory は「『私たちが協力的と呼ぶ理屈のタイプのn人ゲームを内容としている。この理論は、ゲームのプレイヤーたちによって形成され得る種々の連携の相互関係の分析に基づく。それに対して、我々の理論は連携がないことに基づく、というのは誰であれ他者との共同ないコミュニケーションなしに、各ゲーム参加者が独立的に行動することを仮定しているからだ。均衡点の概念は、私たちの理論の基本要素だ。この概念が2人ゼロサムゲームの解の概念の一般化をもたらす。』とそれらの区別を初めて明確にさせた。」(Ibid., pp. 499-500)

均衡点の証明は、博士論文の中でブルーワーの固定点定理 Brouwer's Fixed point theorem に基づいて与えられている。 $s = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ をn個の混合戦略が一組になったものとせよ。ナッシュは $s \rightarrow s' (s, \lambda)$ 、ゲームの反復回数 $\lambda = 1, 2, \dots$ の連続写像の数列を定義し、この数列の固定点群が均衡点である極限点を持つことを示す。その写像において $s' (s, \lambda) = (S'_1, S'_2, \dots, S'_n)$ 、但、

$S'_i (s, \lambda) = \sum \alpha \pi_{i\alpha} C'_{i\alpha} (s, \lambda)$ 。この写像の構成体は、sの三つの連続関数に基づく。(1). $\rho_i (s) = \text{Max} \alpha \pi_{i\alpha} (s)$ 、但、 $\pi_{i\alpha} (s)$ は、他のn-1プレイヤーたちがsの中の混合戦略を使うことを与件に、純粋戦略 α を使うプレイヤーiの報酬。

(2). $\ln \phi_{i\alpha} (s, \lambda) = \ln \pi_{i\alpha} (s) - \ln \rho_i (s) + \ln 1 / \lambda$

(3). $\phi_{i\alpha} (s, \lambda) = \text{Max} [0, \phi_{i\alpha} (s, \lambda)]$ 、これらを組み合わせて

$$C'_{i\alpha}(s, \lambda) = [\phi *_{i\alpha}(s, \lambda)] / [\sum \beta \phi *_{i\beta}(s, \lambda)]$$

C' の連続性を与件に、写像 $s \rightarrow s'(s, \lambda)$ 、 $\lambda = 1, 2, \dots$, は連続だ。 s は集合的な一つの区画だから、ブルーワーカーの定理によって s^* に収斂する一続きの固定点群が存在する。それが均衡点であることをナッシュは証明する(Ibid., p. 500, n. 18)。 $C'_{i\alpha}$ は、プレイヤー i が採り得る戦略を β で標記して、それを全て合算した報酬で戦略 α の報酬を除しており、総戦略の報酬総額に占める戦略 α の報酬のシェアを示すので、プレイヤー i の戦略選択の頻度がそれに従うとすれば、戦略 α の採用される確率を意味する。そうすると S'_i がプレイヤー i の期待報酬だということがわかる。但、(2)はプレイヤー i の努力水準最大を仮定するものと解釈する。

ナッシュはマス行動として、ゲーム参加者がゲームの全体像を把握することなく、ゲームの反復で実行可能な種々の純粋戦略の中の相対優位に関する経験的情報を蓄積し、各純粋戦略が使われる安定的頻度が存在すると仮定し、時間を通じて各プレイヤーは各純粋戦略に結合される期待報酬を学び、最適な純粋戦略を採ると説明する。

エージェントが実際にどのように行動するか分析は説明的ないし経済的であり、一方、ゲームで合理的予知は唯一だとして、ある目的の達成を求めているエージェントが採るべき行動を考察する数学的ないし規範的研究があり、それらの間での緊張は、経済学方法論の一課題だ(Ibid., pp. 501-502 及び n. 20)。

引用及び参考文献

- Camerer, C. 1995, Individual Decision Making, in Kagel and Roth ed. Handbook of Experimental Economics, Princeton University Press.
- Henderson, J. and Quandt, R. 1980, Microeconomic Theory A Mathematical Approach 3rd. ed., McGraw-Hill.
- Leonard, R. 1994, Reading Cournot, Reading Nash: The Creation and Stabilization of the Nash Equilibrium, Economic Journal, vol. 104, pp. 492-511.
- Roth, A. 1995, Introduction to Experimental Economics, in Kagel and Roth ed., op. cit.
- Starr, R. 1997, General Equilibrium Theory, Cambridge University Press.
- 大阪市立大学経済研究所編、1992、『経済学辞典第3版』、岩波書店
- 木村雄一、2008、ライオネルロビンズと効用の個人間比較、経済学史学会関東部会資料
- 杉本昌俊、1999、期待効用理論と共通率効果、『ファッションビジネス学会論文誌』、vol. 5、pp. 137-142